一般相対性理論入門

S&S

1Sep.2018

1　反変テンソルと共変テンソル

　テンソルは特殊な多次元行列のような概念だが、座標変換と深く関わっている。

　2 階のテンソルを例にとろう。

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu} \tag{1}$$

と変換するものを反変テンソル、

$$T_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T_{\mu\nu} \tag{2}$$

と変換するものを共変テンソル、

$$T^{\mu'}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T^{\mu}_{\nu} \tag{3}$$

と変換するものを混合テンソルという。

座標変換に伴って以上のように変換する量をテンソルという。

2 リーマン幾何

リーマン空間は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{4}$$

(ds は微小距離)
(x^{μ} は座標)
($g_{\mu\nu}$ はリーマンの計量)
で与えられる。

ds は、その点における距離密度のようなものと考えるとわかりやすい。ds は不変量であり、座標変換によって値を変えない。

リーマンの計量は共変テンソルであり対称テンソル

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{5}$$

である。

リーマン空間における最短距離は測地線と呼ばれる。測地線の方程式は、

$$\ddot{x^\kappa} = \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} \tag{6}$$

として、

$$\ddot{x^\kappa} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \dot{x^\mu} \dot{x^\lambda} - \dot{x^\kappa} \frac{\frac{d^2 s}{d\tau^2}}{\frac{ds}{d\tau}} = 0 \tag{7}$$

$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ はクリストッフェルの記号と呼ばれ、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\kappa\omega} \left(\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\omega} \right) \tag{8}$$

または、$s = \tau$ として

$$\frac{d^2 x^\kappa}{ds^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{9}$$

である。

3　ユークリッド空間

ユークリッド空間とは適当な座標変換を行うとリーマンの計量の全ての成分を定数ならしめるリーマン空間である。

4　局所的ユークリッド空間

リーマン・クリストッフェルのテンソルは

$$K^{\kappa}_{\nu\mu\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\kappa}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \quad (10)$$

で与えられる。これは曲率テンソルとも呼ばれる。

$K^{\kappa}_{\nu\mu\lambda} = 0$ であるリーマン空間は局所的にはユークリッド空間である。

5　ミンコフスキー空間

ミンコフスキーの計量は、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

で与えられる。ミンコフスキー空間は 1 つのリーマン空間であって、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \tag{12}$$

で表される。

$x^0 = \tau = ct$、$x^1 = x$、$x^2 = y$、$x^3 = z$ で c は光速、t は時間... などである。

アインシュタインの解釈によれば、リーマン空間における物体は測地線を進む。

ミンコフスキー空間の測地線の方程式は、$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = 0$、$\dot{x}^0 = 1$、$\ddot{x}^0 = 0$ となるから、(7) より

$$\frac{d^2 s}{d\tau^2} = 0 \tag{13}$$

(7)、(13) より、

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2}=0 \tag{14}$$

$$\frac{d^2x^2}{d\tau^2}=0 \tag{15}$$

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2}=0 \tag{16}$$

つまり、$t-x-y-z$ 時空間において

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{17}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0 \tag{18}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0 \tag{19}$$

となり、ミンコフスキー空間は加速度のない空間を表している。等速直線運動をする。

ミンコフスキー空間は 1 つのユークリッド空間である。

6　アインシュタインの重力の法則

　ミンコフスキー空間に習ってアインシュタインはからっぽの空間ではリッチテンソルが 0 となると仮定した。つまり、

$$R_{\mu\lambda} = 0 \tag{20}$$

からっぽの空間とは重力の影響を受けても良いが重力を作り出す物質が存在しない部分の空間をいう。

リッチテンソルとはリーマン・クリストッフェルのテンソルを縮約したものであり、

$$R_{\mu\lambda} = K^{\nu}_{\nu\mu\lambda} \tag{21}$$

$R_{\mu\lambda} = 0$ となるのだからこれまた局所的にユークリッド空間を記述する。

アインシュタインの考えた空間は局所的にユークリッド空間なのである。これが空間が曲がっているというゆえんである。この空間は重力場を記述する。計量 $g_{\mu\nu}$ が重力場を決定する。

7　シュヴァルツシルト解

　からっぽの空間におけるアインシュタインの重力の法則 $R_{\mu\lambda}=0$ の 1 つの解はシュヴァルツシルト解と呼ばれ、シュヴァルツシルトによって求められた。あからさまな形は、

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 \\ -r^2d\theta^2-r^2sin^2\theta d\phi^2 \tag{22}$$

(G は万有引力定数、M は重力源となる星などの質量、c は光速) である。

　ここで大事なことは物体はこのシュバルツシルト解の測地線を進むということだ。

　これはニュートンの運動の法則に従って動く物体の軌跡をわずかに変えたものであり、ブラックホールの存在をも予言する。

8　重力波

からっぽの空間におけるアインシュタインの重力の法則 $R_{\mu\lambda} = 0$ は重力場を記述し、計算すると計量 $g_{\mu\nu}$ の各要素がリーマン幾何におけるダランベールの方程式を満たすことがわかっている。

ユークリッド空間におけるダランベールの方程式とは

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{23}$$

であった。リーマン幾何におけるダランベールの方程式は共変微分 (微分したものがテンソルとなる) という概念で書き改めねばならない。

計量の全ての成分がリーマン幾何におけるダランベールの方程式を満たしている。各成分が波動となって伝わる。これを重力波と呼ぶ。アインシュタインによって予言されたものだ。

9　参考文献

1) ディラック「一般相対性理論」江沢洋　訳、1990 年、東京図書株式会社

2) 矢野健太郎「リーマン幾何学入門」1990 年、森北出版株式会社