

アインシュタイン方程式の 導出

S&S

1Dec.2018

リーマン空間は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

と表される。このリーマン空間において

$$\nabla_\omega R^\kappa_{\nu\mu\lambda} + \nabla_\nu R^\kappa_{\mu\omega\lambda} + \nabla_\mu R^\kappa_{\omega\nu\lambda} = 0 \quad (2)$$

が恒等的に成り立つ。これはビアンキの第 2 恒等式と呼ばれている。

$R_{\nu\mu\lambda}^{\kappa}$ はリーマン・クリストッフエルのテンソルで

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\kappa} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \quad (3)$$

と計算される。 $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ はクリストッフエルの記号と呼ばれ、

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\omega} \left(\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\omega}} \right) \quad (4)$$

∇_{ω} は普通の微分と違い、共変微分である。

ビアンキの第 2 恒等式から

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (5)$$

$R^{\mu\nu}$ はリーマン・クリストッフエルのテンソルを縮約したもので、リッチテンソルと呼ばれている。

R はリッチテンソルをさらに縮約したもので、曲率スカラーと呼ばれている。

さて流体力学におけるエネルギー運動量テンソ

ルは、

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x & p + \rho v_x^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y & \rho v_x v_y & p + \rho v_y^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_z & \rho v_x v_y & \rho v_y v_z & p + \rho v_z^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。それは例えば連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

である。($\rho v_x = i_x$ で流れを表す。)

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (9)$$

で対称である。

(5) は

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \quad (10)$$

とおき、

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (11)$$

とも書ける。

$$G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu} \quad (12)$$

で対称である。

(7) はリーマン空間版で

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (13)$$

と表されるだろう。もちろん

$$\nabla_{\mu} \kappa T^{\mu\nu} = 0 \quad (14)$$

(11) と (14) を比較して

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (15)$$

と言えないだろうか。これは物理的仮定である。これがアインシュタイン方程式 (宇宙項なしの。) である。

(15) の κ の値は、ここでは詳しく述べないが、ニュートン力学と照らし合わせて

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (16)$$

アインシュタイン方程式は

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (17)$$

両辺に $g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}$ をかけて縮約すると

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (18)$$

添え字を置き換えて

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (19)$$

ところで、物質のないところつまりからっぽの空間でのアインシュタイン方程式は

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (20)$$

より

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (21)$$

となる。つまり、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0 \quad (23)$$

$$R^\nu_\nu - \frac{1}{2} R g^\nu_\nu = 0 \quad (24)$$

$$R - \frac{1}{2}R\delta^\nu_\nu = 0 \quad (25)$$

$$R - \frac{1}{2}R \cdot 4 = 0 \quad (26)$$

$$-R = 0 \quad (27)$$

$$R = 0 \quad (28)$$

(28) を (22) に代入して

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (29)$$

からっぽの空間ではリッチテンソルが 0 になることがわかった。

参考文献

- 1) 須藤靖「一般相対論」2016 年、日本評論社
- 2) 矢野健太郎「リーマン幾何学入門」1990 年、森北出版株式会社